

教科書等には、微分方程式の記述があります。これは大学2年生の初め頃に出てくる内容ですので、工業力学第二ではその知識を要求しません。教科書等の記述を理解するための最小限の知識を以下にまとめておきました。教科書等の記述を理解できると、運動力学の理解がより深く楽しくなります。是非、活用して下さい。

< $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ の一般解 >

$$1. \quad b^2 - 4ac > 0 \text{ の時} \quad x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (1)$$

$$\text{or} \quad x = C_1 \sinh \lambda_1 t + C_2 \cosh \lambda_2 t \quad (1)'$$

$$\text{但し, } \lambda_1, \lambda_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad C_1 \text{ と } C_2 \text{ は任意の定数.}$$

$$2. \quad b^2 - 4ac = 0 \text{ の時} \quad x = C_1 e^{\alpha t} + C_2 t e^{\alpha t} \quad (2)$$

$$\text{但し, } \alpha = -\frac{b}{2a}, \quad C_1 \text{ と } C_2 \text{ は任意の定数.}$$

$$3. \quad b^2 - 4ac < 0 \text{ の時} \quad x = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \quad (3)$$

$$\text{or} \quad x = C_1 e^{\alpha t} \sin(\beta t + C_2) \quad (3)'$$

$$\text{但し, } \alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}, \quad C_1 \text{ と } C_2 \text{ は任意の定数.}$$

< 補足 & 説明 >

- ・ 2 階微分方程式の一般解は 2 つの 1 次独立な解の線形結合で表される。線形結合の係数は不定積分する際に必要となる積分定数に対応している。つまり、2 階の微分方程式を解く操作には、2 回の積分が含まれている。したがって、2 階の微分方程式の一般解には 2 つの任意定数が含まれる事になる。
- ・ 1 次独立であるとは、「ある関数がのこりの関数の線形結合（係数をかけて足し合わせたもの）で表せない」ことである。ロンスキアン行列式で 1 次独立性を確認できる。
- ・ 式(1)の場合、仮に $x = e^{\lambda t}$ とおいて微分方程式に代入すると解であることがわかり、さらに $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ より、その解が 2 つあることがわかる。一般解の唯一性があるため、一次独立な 2 つの関数 $x = e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ の線形結合 $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ を作ればそれを一般解としてよいことになる。
- ・ $\sinh \theta = (e^\theta - e^{-\theta})/2$ と $\cosh \theta = (e^\theta + e^{-\theta})/2$ より式(1)の指数関数は式(2)の様に双曲線関数でも表せる。
- ・ 上記 2 の場合、 $x = e^{\lambda t}$ とおいて得られる解が 1 つしかないため、もう 1 つの解が必要になる。下記 B 項や C 項の方法で見つけることができ、 $x = t e^{\lambda t}$ がもう一つの 1 次独立な解であることがわかる。
- ・ 以下の様にして式(3)や(3)'を式(1)より求めることもできる。

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_1, \lambda_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \alpha \pm \beta i \quad (\text{ここで } i \text{ は虚数単位.}) \text{ とおくと,}$$

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{(\alpha + \beta i)t} + C_2 e^{(\alpha - \beta i)t} = e^{\alpha t} (C_1 e^{i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t}), \quad \text{さらに } e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta \text{ を用いると}$$

$$\begin{aligned} x &= e^{\alpha t} (C_1 e^{i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t}) = e^{\alpha t} \{C_1 (\cos \beta t + i \sin \beta t) + C_2 (\cos \beta t - i \sin \beta t)\} \\ &= e^{\alpha t} \{(C_1 + C_2) \cos \beta t + i(C_1 - C_2) \sin \beta t\}, \quad \text{任意の定数 } C_1 \text{ と } C_2 \text{ を } B_1 \text{ と } B_2 \text{ を用いて書きなおすと,} \\ &= e^{\alpha t} (B_1 \cos \beta t + B_2 \sin \beta t) = B_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + B_2 e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad \text{となり, 式(3)のように表せる.} \end{aligned}$$

但し、 B_1 と B_2 も任意の定数である。

$$x = B_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + B_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \text{ はさらに変形できて,}$$

$$= e^{\alpha t} (B_1 \cos \beta t + B_2 \sin \beta t) = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} e^{\alpha t} \left(\frac{B_1}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}} \cos \beta t + \frac{B_2}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}} \sin \beta t \right)$$

B_1 と B_2 に対して, $\frac{B_1}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}} = \sin A$, $\frac{B_2}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}} = \cos A$ となるような A を見つけることができる.

$$x = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} e^{\alpha t} (\sin A \cos \beta t + \cos A \sin \beta t) = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} e^{\alpha t} \sin(\beta t + A)$$

$A_0 = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$ とおけば, 一般性を失うことなく, 任意の定数 A_0 と A を用いて,

$x = A_0 e^{\alpha t} \sin(\beta t + A)$ と表すことができ, 一般解を式(3)のように表せる.

参考：大学の学部で習う微分方程式のまとめ

1. 線形微分方程式

(1) 1 階線形微分方程式

- (a) 変数分離形 and それに帰着できる形
- (b) 同次形 and それに帰着できる形
- (c) 完全微分形

(2) 2 階線形微分方程式 {一般解} = {同次方程式の一般解} + {特解}

- (a) 定係数 (振動の力学, LCR 回路, に良く用いられる.)
- (b) 変係数 (解の収束性から制御の安定性につながる.)

(3) n 階線形微分方程式 {一般解} = {同次方程式の一般解} + {特解}

- (a) 級数解法 (直交関数系への展開 (べき級数, フーリエ, ローラン, etc...) へつながる.)
- (b) 特別な名前が付いているものがある (ベッセル, ルジャンドル, ラゲール, チェビシェフ, etc...)

(4) 特解の求め方

- (a) 定数変化法 (階数低下法)
- (b) 演算子法 (フーリエ変換やラプラス変換へつながる)

2. 非線形微分方程式 (一般的には解けないが, 変数変換して解析的に解ける例がいくつかある.)

- (1) オイラー型微分方程式
- (2) ベルヌーイ型微分方程式

3. 線形偏微分方程式

- (1) 拡散方程式 (熱伝導や物質の拡散を記述する方程式)
- (2) 波動方程式 (波, 光=電磁波, 電子等の粒子の振る舞いを記述する方程式→量子力学)
- (3) ポアソン方程式 (静電場, 表面張力でバランスする液体, 等を記述する方程式)

- A. ロンスキアン行列式 n 階微分方程式の一般解には n 個の未定定数 (自由度, 積分定数) がある
- B. 定数変化法 (階数低下法) (積分時に積分定数を入れると一般解も出てくる)
- C. 演算子法 (積分時に積分定数を入れると一般解も出てくる)
- D. 級数解法 整次式を係数に持つ常微分方程式
- E. フーリエ変換による解法 拡散方程式等の偏微分方程式を積分の形で解くことができる.

上記の用語とその内容が全て理解できておれば, 大学学部で習う微分方程式に関して最小限の知識があると思って良い. 特に, 1(2)(a) 2 階線形定係数同次微分方程式: $a\ddot{x} + b\dot{x} + c = 0$ は, 力学では振動の問題で頻繁に使用する. 電気回路では LCR 回路の問題で頻繁に使用する. これらは 2 年生後期頃より習うフーリエ変換やラプラス変換につながって行くのでしっかりと勉強しておくこと.

- ・本稿は東京工業大学 4 類の 1 年の講義「工業力学第二」(高橋クラス) の受講学生の為の資料です.
- ・ミスプリント等を指摘してくれた学生にはボーナスポイントを進呈します.
- ・改善点を指摘してくれた学生には内容に応じてボーナスポイントを進呈します.